

Aria, Acqua, Onde e Ali

Un breve *excursus* nella dinamica dei fluidi

Gregorio Falqui e Giovanni Ortenzi
Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università di Milano Bicocca

Primavera in Bicocca, U5-3014, 7 marzo 2018



H2020-MSCA-RISE-2017 PROJECT No. 778010 IPaDEGAN



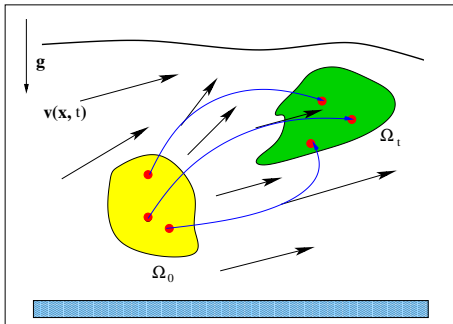
Indice

- ▶ Equazioni della fluidodinamica
- ▶ Onde
- ▶ Ali

Un po' di storia: i fondamenti della dinamica dei fluidi risalgono al XVIII secolo (J. e D. Bernoulli, Eulero,)

Problema complicato: meccanica (e termodinamica) di "sistemi ad un numero infinito di gradi di libertà", per costruzione ben più ardui (matematica e fisica) dello studio, e.g., del moto dei pianeti.

Storicamente, questo ha portato ad interazioni un po' ruvide tra "teorici" (matematici e fisici)" e "sperimentali" (fisici e ingegneri).



Moto di una porzione di fluido Ω : campo di velocità $\vec{v}(\vec{x}, t)$.

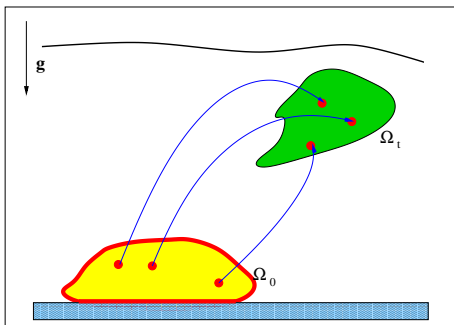
Domanda: Come determinare il campo di velocità?

Risposta: con il secondo principio di Newton!

$$\frac{\Delta \vec{P}(\Omega)}{\Delta t} = \vec{F}_{Sup}(\Omega) + \vec{F}_{Vol}(\Omega)$$

$\vec{P}(\Omega)$ è il momento lineare contenuta in Ω , ($= \int_{\Omega} \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) dVol$).

$\vec{F}_{Vol}(\Omega)$ è la forza di volume **esterna** (**nota**, per esempio $\vec{g}$).



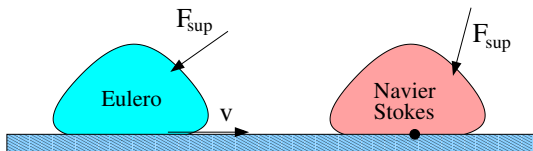
Chi **non è nota** (ed al tempo di Bernoulli, Eulero &, nemmeno comprensibile e descrivibile in linea di principio) è la interazione tra il resto del fluido ed il volume Ω sotto esame, così come la interazione tra il fluido e la parete del recipiente, (che avviene nello strato attorno al bordo del volume Ω nella figura qui sopra).

Risposta: modellizzazione fenomenologica (*equazioni costitutive*).

- ▶ Eulero (~ 1740): fluidi ideali ("*acqua secca*"):
 - a) La forza di superficie è sempre perpendicolare al bordo del volume Ω (pressione, statica e dinamica).
 - b) la velocità del fluido sulle pareti del recipiente è parallela alle pareti.

Paradosso di D'Alembert!!

- ▶ Navier-Stokes (~ 1820): fluidi reali ("*acqua bagnata*"):
 - a) La forza di superficie sviluppa (dinamicamente) una componente tangenziale al bordo di Ω (viscosità, sorta di attrito)
 - b) la velocità del fluido sulle pareti del recipiente è **NULLA**.



Gocce d'acqua di Eulero e di Navier-Stokes

Il modello di Eulero ammette soluzioni di tipo ondulatorio che descrivono la propagazione di energia (e non di materia).

1. Onde sonore: oscillazioni di pressione e densità in un fluido comprimibile: gas, ma anche liquidi e solidi.
2. Onde in acqua: oscillazioni dell'interfaccia aria-acqua in un fluido incompressibile soggetto alla forza di gravità.

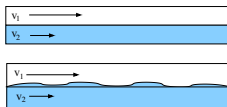
Differenze fondamentali:

1. Le onde sonore sono longitudinali e non dispersive: la velocità di propagazione è $v_S = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} \bar{R} T} \simeq 343 \text{ m/sec}$ (aria a 293°K) per tutte le lunghezze d'onda.
2. Le onde d'acqua sono trasversali e dispersive: la velocità di propagazione è - con profondità del mare "infinita" -

$$v_W = \sqrt{\frac{g}{2\pi} \lambda} \simeq 1.25 \sqrt{\lambda} \text{ m/sec}, (\lambda \text{ è la lunghezza d'onda}).$$

Fenomeni di "bordo/interfaccia" (sempre Eulero.....).

A): Instabilità di Kelvin-Helmholtz ($\rho_2 \simeq \rho_1$).



Da piccole perturbazioni si generano instabilità e piccoli vortici all'interfaccia che separa i due fluidi che si muovono a velocità diverse.



Livello del mare, foto presa da un treno (economica)



In volo, un po' meno economica



Vista da Vincent, l'originale è decisamente costoso...

B): Onde interne negli oceani. L'acqua nel mare non ha densità *costante*. La densità ha un "salto" dell'ordine di qualche per cento in corrispondenza di un sottile strato (picnoclina) a profondità di qualche centinaio di metri. La picnoclina separa strato superficiale più caldo e con salinità minore (dunque a densità minore) con l'acqua profonda, fredda e a salinità superiore (dunque a densità maggiore).

Piccole perturbazioni (e.g. topografia, come i rilievi marini nello stretto di Gibilterra) dello stato di equilibrio possono alla formazione di "*onde interne*": oscillazioni *dell'interfaccia* tra i due strati che propagano con

$$\text{velocità: } v_W = \sqrt{\frac{\Delta\rho}{2\bar{\rho}}} \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \lambda.$$

Monbureau Vu White internal wave

Qui finisce questa prima parte del "viaggio" *a vol d'oiseau* nella dinamica dei fluidi. Ci ha portato peraltro dal secolo XVIII ai giorni nostri.



L'aria, l'acqua, le onde, le ali.

B) Onde interne negli oceani. L'acqua nel mare non ha densità costante. La densità ha un "salto" dell'ordine di qualche per cento in corrispondenza di un sottile strato (piccolissimo) a profondità di qualche centinaio di metri. La piroclasta sopra strato superficiale più caldo e con salinità minore (funce a densità minore) con l'acqua profonda, fredda e a salinità superiore (funce a densità maggiore).

Piccole perturbazioni (e.g. topografia, come i rilievi marini nello stretto di Gibilterra) dello stato di equilibrio possono alla formazione di "onde interne". oscillazioni dell'interfaccia tra i due strati che propagano con velocità: $v_{int} = \sqrt{\frac{g}{2\rho} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} \lambda}$.

Mathematica: la Wave interval wave
 Qui finisce questa prima parte del "viaggio" a voi d'oiseau nella dinamica
 dei fluidi. Ci ha portato persino dal secolo XVIII ai giorni nostri.

77800 — IPaDEGAN — H2020-MSCA-RISE-2017